隣接3項間漸化式の様々な解法

山 K@yamak0523

まず始めに, 本稿で取り上げる問題を紹介する.

問題. 数列 $\{a_n\}$ が隣接 3 項間漸化式

$$a_1 = 1, a_2 = 11, a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$$

をみたすとき, 一般項 a_n を求めよ.

この問題は高校数学で学習し, 大学入試数学でも基本的な問題である. この問題の様々な解法を紹介していく.

解法 1. 特性方程式を用いる方法

特性方程式 $t^2 - 2t - 3 = 0$ を解くと $t = 3, -1$ となるから, 漸化式は

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -(a_{n+1} - 3a_n) \tag{1}$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 3(a_{n+1} + a_n) \tag{2}$$

となる.

(1) 式より $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 8, 公比 -1 の等比数列より

$$a_{n+1} - 3a_n = 8 \cdot (-1)^{n-1} \tag{3}$$

となる. 同様に, (2) 式より $\{a_{n+1} + a_n\}$ は初項 12, 公比 3 の等比数列より

$$a_{n+1} + a_n = 4 \cdot 3^n \tag{4}$$

となる. ここで, (4) 式から (3) 式を引くことで一般項

$$\boldsymbol{a_n = 3^n + 2 \cdot (-1)^n}$$

が得られる.

解法 2. 行列を用いる方法

漸化式を行列を用いて書き直すと

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる. よって, (5) 式を繰り返して用いることにより

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

が得られる.

ここで, $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とすると, A の固有方程式は $\lambda^2-2\lambda-3=0$ より, 固有値は $\lambda=3,-1$ であることがわかる. また, $\lambda=3$ に対する固有ベクトル (の 1 つ) は $\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$, $\lambda=-1$ に対する固有ベクトル (の 1 つ) は $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ であるから, $P=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とすると, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ と対角化される. ゆえに, 両辺 $(n-1)$ 乗すると

$$(P^{-1}AP)^{n-1}=P^{-1}A^{n-1}P=\begin{pmatrix}3^{n-1} & 0\\ 0 & (-1)^{n-1}\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}A^{n-1}&=P\begin{pmatrix}3^{n-1} & 0\\ 0 & (-1)^{n-1}\end{pmatrix}P^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{n-1} & 0\\ 0 & (-1)^{n-1}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^n-(-1)^n & 3^n+3\cdot(-1)^n\\ 3^{n-1}-(-1)^{n-1} & 3^{n-1}+3\cdot(-1)^{n-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから, (6) 式に代入すると

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^n-(-1)^n & 3^n+3\cdot(-1)^n\\ 3^{n-1}-(-1)^{n-1} & 3^{n-1}+3\cdot(-1)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n+1}+2\cdot(-1)^{n+1}\\ 3^n+2\cdot(-1)^n\end{pmatrix}$$

となる. 以上より一般項

$$\boldsymbol{a_n=3^n+2\cdot(-1)^n}$$

が得られる.

解法 3. 母関数を用いる方法

$\{a_n\}$ の添字を 0 から開始するように拡張する. $a_0=3$ とすると隣接 3 項間漸化式を $n=0$ からみたすことがわかる.

数列 $\{a_n\}$ に対して, 母関数は形式的冪級数 $F(x)$ は $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ で定義される.

母関数を用いると隣接 3 項間漸化式より

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+2}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=0 \tag{7}$$

が成り立つ. (7) 式を $F(x)$ を用いて書き直すと

$$(F(x)-3-x)-2x(F(x)-3)-3x^2F(x)=0$$

より

$$F(x)=\frac{-5x+3}{1-2x-3x^2}=\frac{1}{1-3x}+\frac{2}{1+x}$$

となる. 等比級数の和の公式より, $|x|<\dfrac{1}{3}$ のとき

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+2\cdot(-1)^n)x^n$$

と変形することができる. 以上より一般項

$$\boldsymbol{a_n = 3^n + 2 \cdot (-1)^n}$$

が得られる.

解法 4. ベクトル空間の基底を求める方法.

$V = \{\{a_n\} \mid a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)\}$ とすると, V はベクトル空間となる. ここで, $\{r^n\} \in V$ となる $r(\neq 0)$ を探す. $a_n = r^n$ を漸化式に代入し両辺 r^n で割ることにより $r^2 - 2r - 3 = 0$ となり $r = 3, -1$ を得る.

また, 初項と第 2 項が定まると漸化式より数列が決定されるため, $\dim V = 2$ である. $\{\{3^n\}, \{(-1)^n\}\}$ は 1 次独立であることに注意すると $\{\{3^n\}, \{(-1)^n\}\}$ は V の基底となり, V の元 $\{a_n\}$ はある定数 A, B を用いて $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$ と表される.

求めたい一般項 a_n は $a_1 = 1, a_2 = 11$ であったから, この条件から $A = 1, B = 2$ が得られる. 以上より一般項

$$\boldsymbol{a_n = 3^n + 2 \cdot (-1)^n}$$

が得られる.